『数は量の抽象』とは何か
－『数』の意味の考察から算数科の内容を見直す　－

What is number of quantity abstraction.　Review the contents of the arithmetic　from the consideration of the meaning of numbers

石原　直
Ishihara Sunao

キーワード：数は量の抽象、数は量の比、算数科、学習指導
KeyWords ：numbers are the abstraction of quantity、numbers are the ratio of　quantity、arithmetic 、educational guidance

要　旨

小学校算数科の内容は、量を根底としたものになっている。６歳という年齢から 12 歳までの児童にとって、日常生活に根ざした内容は、理解しやすいといえる。しかし、本来数には量はない。数学の内容を見ればそれは明らかである。「数は量の抽象」という考え方と「数は量の比」という考え方を対比することで、算数科の学習を容易にできるかを考察する。

Abstract

The content of the elementary school arithmetic department is based on the amount. For children between the ages of 6 and 12, it is easy to understand the content rooted in daily life. However, there is originally no amount in the number. It is clear if the content of mathematics is seen. By comparing the idea of "numbers are the abstraction of quantity" and the idea of "numbers are the ratio of　quantity", we consider whether learning in the arithmetic department can be easily done.

はじめに

児童は数を小学校の算数科で初めて知識として学ぶ。小学校入学以前は、日常生活の中で物の個数として身につけてくる。従って児童にとって数は物の個数、すなわち量である。

算数の学習を進めていく過程で、数を量として捉えることで理解しにくい内容が出てくるが、そこは巧妙に意味づけされることで、児童が気づかずに進んでいく。しかし、それによって、中学校で数学に移行する際、正負の数や方程式などでつまずく原因の一つになっている。

ここでは、これまで、『数』をどのように捉えてきたかを見ていくとともに、小学校算数科の根底にある『数は量の抽象』とは何かを考察することを通して、算数科の課題を考えていく。

1　これまで『数』(number)をどう捉えてきたか

これまで多くの数学者が、『数』について述べてきた。そのいくつかを挙げ、『数』についての捉え方を観ていく。

「エウクレイデス（ユークリッド）は、『ストイケイア（原論）』の中で、「１．単位とは存在するもののおのおのがそれによって１と呼ばれるものである。　２．数とは単位からなる多である。」と定義している。これは、「数＝基数」と表明していることでもある。つまり数とは個数を抽象した概念であるというのは、エウクレイデスの考えを発展させたものだということになる。」（高木、2011, p5,6 ）

シモン・ステヴィンは、「数と量が独立なものではなく、量の大小を表すのが数である」（「十分の一」、1585）という認識を示していた。その後ニュートンは『普遍算術』で「・・・（前略）数という言葉でわれわれは単位の多様性を理解しているが、むしろ単位としてとられた同種の量に対して抽出された比として捉える方がよいだろう。このように観たとき、数には整数、分数、無理数の 3 種類があると言える。整数は単位によって測られるものであり、分数は単位の部分によって測られるものである。無理数は単位とは非共測（incommensurable）なものである」（1720）と記している。

また、オイラーも『代数学入門』で「・・・（前略）測量したい対象の集まりの中で、一つを単位として選ぶ、しかる後、与えられた対象のこの単位に対する比を決定せよ。この比が数である。数とは一つの量の、単位として取られた、他の任意に選ばれた量に対する比以外の何ものでもない（中略）・・・増加、あるいは減少する可能性のあるものは何であれ、量と呼ばれる。（中略）・・・全ての量は数によって表されるということは赤費である」（1770）と記している。

これに対して、グラスマンは、『中学高校生のための算術教科書』の中で、「数をものの個数や量の比など、外的な存在との関連で捉えないで、単なる記号の列としてとらえる」（1871）と記しているが、足立は「ここでいう「量」とは、これまで述べられてきた「量」ではなく、「対象」または、「記号」といえるであろう」（足立、2011）と解釈している

リヒャルト・デデキントは『数について』で、「数というものをこのような大きさをもう一つ別の同種の大きさで測った結果・・（後略）」（p18）と述べている。このことは、同種の大きさの比と述べていると考えられる。また、『数とは何か　そして何であるべきか』で「整数の算術は、最も単純な算術的演算、つまり、数え上げの､必然的な、あるいは少なくとも自然な､帰結と考えられる。そしてこの数え上げは、そこで生成される一つ一つがすぐ前のものから定義されていくという、正の整数の無限列の逐次的な創造に他ならない」（1872）と記している。

日本近代数学の祖といわれる高木貞治は、『新撰算術』で、「ここにあまたの物あるとき、その個々の物よりその一つの物なりということのほか、全ての特性を抽出し去るときは即ち数の概念を生ず・・・（中略）一つの物に対する数を一と称し、これを表すに 1 という記号を以てす。あまたの一集まりて数をなす、数を表すには 1 をいくつか反復すれば足れり」（1898）と記している。

また高木は（『数の概念』で「（前略）・・・我々の整数は、物の数でもなく、物の順序を示すものでもない。しかし、物の順序を示すためにも､なお一般に、物の標識（符牒）としても用いられる。0 は加法の規準として、我々が任意に整数の体系の中から取りだし

た一つの整数である。それは、無を示すものではない。整数を計量に応用するならば、我々の鼻が一つ、目が二つであることが、整数 1，2 で表現されるのが便利であろうが、それは言語の習慣に過ぎない。事実は、我々が常用の言語に順応して、我々の記号 0，1，2 を零,一,二と呼ぶことにしたのである」（1949）と記している。

高木貞治の師でもある、数学者藤沢利喜太郎は、「数の概念は外界を離れて存在するものなり」という考えに基づき、数学に「量」を持ち込むことを禁止し、『算術教科書』の中で、「6 ＋ 3 の計算をするとき、まず 6 とおき、つぎに、7，8，9 と 3 つ先へ数えて、9 という答えをだすのです」（1896）という「数え主義」と呼ばれる理論を主張した。

この数え主義に対して、「数の背景には量があり、量の土台には実在がある」として、量こそが算数教育の基礎であると主張したのは、遠山啓である。遠山は、子どもたちの学習成果が十分でないのは、量の考えをはっきりとつかんでいないことが最も大きな原因であるとし、量についての系統的な指導が欠くことができないものであるとした。

2『数』の定義と算数科で扱う数の範囲

算数科で扱う「数」のほとんどは自然数である。自然数は、1 を次々に加えていってできる数である。自然数の持っている性質の中で重要なものは、以下である。

Ⅰ、2 つの自然数 a, b の間には、次の 3 つの関係のうちの 1 つが必ず成り立つ。$a = b$、$a < b$，$a > b$

Ⅱ、任意の 2 つの自然数を加えると、その答えもまた自然数となる。そして、その加法については次の法則が成り立つ。$a + b = b + a$，$(a + b) + c = a + (b + c)$

Ⅲ、2 つの自然数を掛け合わせると､答えは必ず自然数になる。

自然数論の基礎となる公理系を定めてから論じるとしたのは、ペアノ（peano）である。「ペアノの公理系」を以下に示す。

定義 1　無定義用語としての「1，数、その後者」と次の 5 つの公理を満たす数の集合 $\boldsymbol{N}$ の数を自然数という。

Ⅰ、1 は数である。すなわち 1 は $\boldsymbol{N}$ に属する。

Ⅱ､各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し､その後者 n' もまた $\boldsymbol{N}$ に属する。

Ⅲ､$n' = 1$ となる n は $\boldsymbol{N}$ の中に存在しない。

Ⅳ､$n' = m'$（$m, n \in \boldsymbol{N}$）ならば $n = m$

Ⅴ､$\boldsymbol{N}$ のある部分集合Mが次の2つの条件を満足させれば､MはNを含む｡すなわち､M＝N､(帰納的公理)

Ⅴ1:M は1を含む。

Ⅴ2:m がMに属するならば、n' は $\boldsymbol{N}$ に属する。

また、宮下は「数」を以下のように定義している。

1，＋は結合的かつ可換

2，×は結合的で、単位元 $1 \in N$ が存在する。

※　ここでNは､Nが零元 0－－＋に関する中立元－－を持つときは､$N \setminus \{0\}$､そうでないときはN自身

3，＋と×の間に左右分配法則が成り立つ。

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

（ｂ＋ｃ）×ａ＝ｂ×ａ＋ｃ×ａ

4，各要素は、＋に関して可約；即ち

ａ＋ｂ＝ａ＋ｃ　⇒　**ｂ＝ｃ**

5, Nの各要素は、×に関して左右可約;即ち、ａ∈Nに対し、

ａ×ｂ＝ａ×ｃ　⇒　ｂ＝ｃ

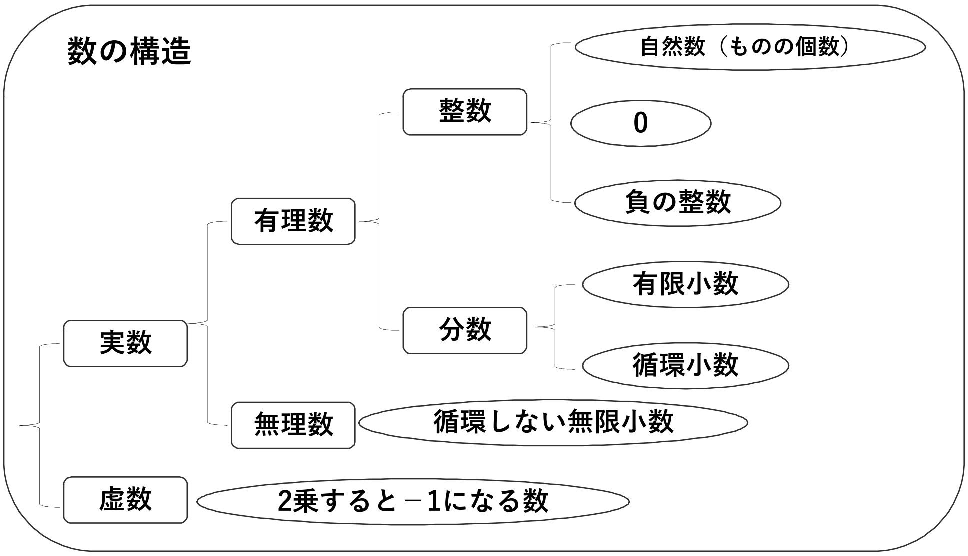
ｂ×ａ＝ｃ×ａ　⇒　ｂ＝ｃ

6，任意の要素ａ、ｂに対し、要素ｃで、ａ＋ｃ＝ｂかａ＝ｂ＋ｃとなるものが存在する。（宮下、2008、ｐ 36、37）

算数科で扱う数の範囲は、整数（integer）、自然数（counting number）、0（zero）、分数（fraction）、有限小数（finite decimal）、循環小数（recurring decimal）である。これは負の数（negative nmber）を除いた有理数（rational number）である。

数の構造から見ると図１のようになる。

（Figure 1）



3『量』(quantity)の意味と算数科での扱い

算数科において、数はどのような意味を与えられているかを考える上で、『量』がどのように扱われているかをみることは不可欠であり、『量』とは何かについてみていく。

(1)『量』の扱い

算数科においては、「長さ」「かさ」「重さ」などの題材で『量』を考えさせている。ここでの『量』は、次の２つに分類される。

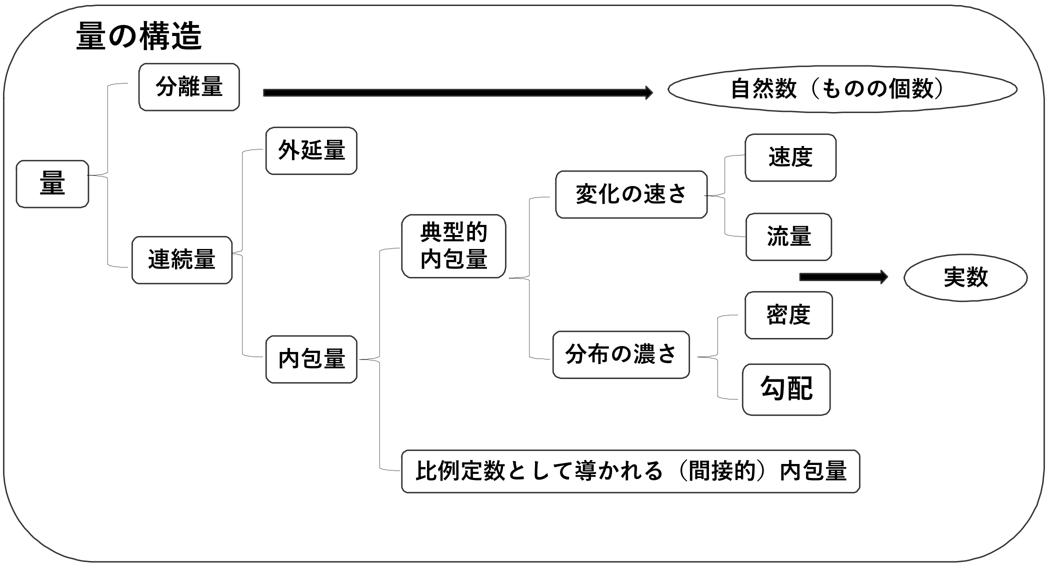
離散量（分離量 separation amount ）：ものの個数のように整数値で表される量

連続量（continuous quantity）：長さ、かさ、重さのように整数値だけでは表せない量

連続量については、半端な量をどのように処理するかが問題になる。この半端な量は、処理の仕方によって「小数」と「分数」が生じる。分数には、量分数（連続しているもの

の量を表す）と割合分数（2 つの整数の比）がある。
　また連続量については、外延量（extensive quantity）と内包量（intensive quantity）があるとする。外延量は大きさや広がりを表す量であり、加法性の成り立つ量である。算数科では主としてこの外延量を扱うが、加法性の成り立たない量として内包量も扱っている。異種 2 つの外延量の商で求められる温度や速度などと、同種 2 つの外延量の商で求められる割合や百分率などであり、「異種の二つの量の割合として捉えられる数量」（学習指導要領算数編　第 5 学年　C 変化と関係）とされているが、本来は割合ではなく「量」である。
　速度は距離と時間という異なる外延量の商で求めるが、この量はいわゆる「単位量あたりの量」であり、変化する 2 つの量の比を示しており、一方の基本単位を 1 として、そのときの他方の量の変化を表すものであるとしている。そのため、速さ同士に加法性は適用できないことになる。しかし、後述するが、速度（速さは方向性が無い表現）にも加法性はあり、多次元量のベクトルで表すこともできる。このことは内包量という考えに疑問を呈することになる。

　量の構造を数との関係で具体的に示すとは図 2 のようになる。
（Figure 2）



(2)　『量』とは何か
　物質が持つ性質は一般的には「質」である。その中で比較によって順序立てられるものを一般的には量という。量は本来「数」と直接結びついていない。「単位」という考え方を導入したことで、数と結びついた。「量」は本来、水が増えていくように連続的に変化していくものであり、容器などに入れて初めて個別となる。その大きさ同士の比較として数値が登場する。すなわち、その容器に単位を付けることで数と結びつく。このように考えていくと、『数』と『量』は別のものと考えられる。
　また、量は連続的に変化していくものを対象とすると、量はそれだけでは数ではなく、単位とす

る量を考えたとき、それと比較することによって、数が生じると考えられる。

足立は「量の公理系」を次のように述べている。「量を数学的に扱うためには、基本命題が公理系として与えられなければならない。同種の量A，Bに対して、AとBの和と呼ばれる同種の量A＋Bが定まってA＋B＝B＋Aなどの基本性質を持つこと。A≠BならばA＜BかB＜A成り立つ順序関係＜が存在すること、またnを自然数とするときAのn倍と呼ばれる同種の量nAが定まることなどが「量の公理系」である」（足立、2013，p11）

4　算数科における「数の意味」とその扱い

(1) 集合数（cardinal number）の概念

算数科の学習では、数を認識するためには量を認識することから入っている。児童はたし算を理解する際、異なる物であるリンゴ3個＝ミカン3個を了解しなくてはならない。その上で、それぞれの集合を包括する果物という集合を理解できなくてはならない。

しかし、この式は、リンゴがいくつあるか（相対的数形態）をミカンがどれだけあるか（等価形態）で表している。このことから集合数の概念が形成されていくが、単に、リンゴの個数とミカンの個数が等価であるということだけを表しており、リンゴの個数とミカンの個数を逆に置くこともできることから、「数」とは、「集団の多さ」を表す抽象概念であることを示している。

(2) 基数(cardinal number)と序数（ordinal number）

「数＝基数」という考え方を最初にしたのは、ユークリッドである。基数は集合数ともいわれ、物の個数を表すものとされる。基数は、離散量を抽象化したものである。序数は順序数ともいわれ、物の順序を表すものとされる。「英語では序数として、first,second,third を使い、基数として、one,two,three を使うことから、序数と基数は区別されている。数は英語で number と言うが、これは個数のことであるので、序数は英語では数として意識されていない。」（足立、p65，1994）

漢字圏の日本語では、基数と序数は同じ文字を使うことから、より抽象化が進んでいたと考えられる。一般的には、物を数えるとき、直感的に数を把握できるもの以外は数を数え終わったときに個数が決まる。従って序数の方が基数より根源的だと考えられてきた。

(3) 算数科における数の導入

小学校1年生の数の導入では、具体的な（ものの集合）の段階から、(多さ（離散量)）という「量」の段階を経て、それらの抽象としての（数（自然数)）となる。それぞれの抽象のレベルが異なることから、「数」と「量」は概念的に区別しなければならない。

しかし、算数科の学習では、具体物→半具体物→数詞という学習過程を経る。この過程を経ることは、具体物は量を感じやすいため、数は量を表すこととなる。

また、この過程の半具体物がくせものである。半具体物はシルエットとなることで、抽象化される。さらに、どんな物であっても同じ物、例えば、おはじきやブロックに全て変換される。様々な具体物が同じブロックに変換されるという高度な作業がなされている。すなわち、大きさも形も違う物が、同じ大きさの半具体物になってしまうのである。そしてそれを数字にあてはめる。いわゆる、蟻も象も同じ1となる。

(4) 日常生活を題材にすること

算数科においては、その題材のほとんどが日常生活を扱っている。これは、身近なもの

を題材にすることで、児童にとってイメージしやすく、学習したことを日常生活の中で使うことで、学習と日常生活（学んだことを使う場面）との双方向の行き来が生じ、学習が強化されるからだと考えられる。

(5) 単位（unit）を付けること

量の大きさは、単位を決めて計ったときの測定値（数値）とその単位との対で表される。厳密に言えば、2本、2個、2人など、分離量の後につくものを「助数詞」といい、2ｍ、2 kg、2ℓなど、連続量の後につくものを「単位」という。

数に単位を付けるのは、算数科の特徴であり、これは具体物を扱うからであると言える。単位を付けることは、子どもにとっては、日常的な物を対象としていることから考えやすいという理屈となる。

宮下は、「単位は、「もとにする量に特化された量」の意味であり、「ｍ（メートル)」、「秒」、「kg（キログラム)」などは特定の量の名前であり、数ではない。」と述べている。（宮下、2007，ｐ 30）

なお、数助詞である「個」は、数える対象に応じて、人、匹、枚、日などと変化していく。また、3ｍは、3ｍのひもでも3ｍのフェンスでもないし、3個は、3個のリンゴでも3個のチョコレートでもない。数字の3は、基になる量である1に対する比であって、ひもの長さでもフェンスの長さでもない。m（単位）に物がついているのである。このことからも、単位は物についているのであって、数についているのではないと考えられる。

5「数は量の抽象」は算数科の学習内容の根底

明治の後半から日本の算数教育の理論の中心になっていたのは、藤沢利喜太郎の「数え主義」である。藤沢は『算術条目及教授法』の中で次のように記している。「・・・（前略）かくの如く、量といふ様なる外物の数学に不必要なるは数学其の物の性質中に存在するものにして､従って此の量と云う様なる外物的概念を数学中より放逐することは数学者、教育家の多年希望するところなりし。而して此の希望は今日は最早満足せられたるものなり」（1892）これは、デデキントの考え方に大きな影響を受けたものと思われる。

これに異を唱え、算数科の内容に大きく影響を与えたのは、遠山啓である。遠山は、それまでの藤沢、和田の「数え主義」から、「数の背景には量があり、量の土台には実在がある」として、量から数を創り出すことを主張し、「数は量の抽象」という考えを推し進め、現在の算数を理論づけた。「数は量の抽象」の考え方は、算数科の題材の中で、数学として考えると不十分な題材や考え方の不備を埋めながら現在に至っている。

遠山の考え方に異を唱えたのは、徹底した数え主義者であった和田義信である。そして近年この考えに異を唱えたのは、宮下英明である。宮下は、「数は量の比」という考え方で、改めて「数は量の抽象」を否定した。しかし、この「数は量の比」という考え方は、これまで算数科の指導をしてきた小学校の教員にはほとんど受け入れられてこなかった。この理由はいくつか挙げられるが、宮下自身が述べているように、「数は量の比」は、数学の考えであり、理解しにくいこと。何よりも現場の教員にとって、「数は量の抽象」の考え方が受け入れやすく、「日常生活」とも結びつけやすかったからであろう。しかし、この考え方で算数科を指導する中で、教員自身も理解が難しい題材が出てくる。

『数』とは何かを考察することを通して、算数科の「数は量の抽象」を破綻させないた

めに、どのように対応してきたかについて考察していく。併せて「数は量の比」の考え方を取り入れることで、児童にとって算数科の学習が理解しやすくなるのかについても考察していく。

6「数は量の抽象」か「数は量の比」か

「数は量の抽象」の考え方は、言い換えれば「量の具象は数」ということになり、「数は量を表す」というものである。これに対して「数は量の比」の考え方は、a の大きさは b の大きさのどれだけで、この「どれだけ」は 2 量の比（倍関係）を表すので、「数は 2 量の比（倍関係）を表す」というものである。

「数は量の抽象」の考え方は、物の量（個数）を数字として表す。リンゴが 2 個あれば、2 となる。「数は量の比」の考え方では、数字の 2 は、基の量の 2 倍という意味になる。従って、基の量がりんご 2 個分だとすると、ここでの 2 はりんご 4 個分の量（4 ではない）ということになる。

具体的な例として「数は量の抽象」の考え方でたし算（2 ＋ 3）の場合を見ると、2（個）＋ 3（個）＝ 5（個）となる。「数は量の比」の考え方では、（もとの量の 2 倍）＋（元の量の 3 倍）＝（もとの量の 2 倍と 3 倍の和）となる。すなわち、数の和は倍の和である。

また、割り算でみると、「数は量の抽象」の考え方は、わり算の（ひとつ分）を求めるか、（いくつ分）を求めるかによって、前者を「等分除」といい、後者を「包含除」という。これに対して、「数は量の比」の考え方では、まず割り算はかけ算の逆の計算であるという押さえをする。割り算の「a ÷ b」は「b とかけて a になる数」を意味し、「b とかけて a となる数」には、b ×〇＝ a と〇× b ＝ a の 2 通りがある。そして b ×〇＝ a から「a ÷ b」が立式される。

具体的に単位をつけて考えると、b グラム×〇＝ a グラムは、「b グラムの何倍は a グラム」から、b グラムはグラムの b 倍、よって b グラムの〇倍は、グラムの b 倍の〇倍。積の定義から、グラムの b 倍の〇倍はグラムの（b ×〇）倍となる。このことは b も〇も量の比とみることができる。

7「数は量の抽象」の考え方の課題

「数は量の抽象」と考えた場合、容易な理解が難しいものがある。どのような内容や場面なのかいくつか挙げる。

(1) 0（zero）のあつかい

0 の意味は、① 何もないという意味の「0」 ② 十進位取り記数法の「0」 ③ 基準としての「0」があるが、算数科ではこのうち①、②を学ぶ。③は、負の数を学ぶときに必要となる。算数科における何もないという意味の「0」は、「0」を量として考えることであり、負の数を学ぶとき、0 − 4 ＝ 0 と間違えることにつながる因子の一つになる。

(2) かけ算（multiplication）の意味の拡張

かけ算の意味は（1 つ分）×（いくつ分）＝（全体）として導入される。しかし、小数や分数を扱う段階になると、（いくつ分）では説明できなくなり、（倍）と言い換える。さらに、（倍）でも説明できなくなり、（割合）を導入する。また、面積、体積も「新しい概念」として、意味の拡張をせざるを得なくなる。

さらに、かけ算は量の問題として導入されるため、意味に沿って立式すると、例えば、5 個のリンゴ× 6 人分＝ 30 個のリンゴとなる。このとき 6 × 5 という式を立てると（いくつ分）×（1 あたり量）の意味になるとして間違いとされる。これも数に量という意味を持たせるからである。なお、(1 つ分）は 1 あたり量であり、割り算の意味の布石となる。

(3) 倍（multiple）の考え方

算数科の学習では、2 年生のかけ算の導入は、「いくつ分」で行われている。これは「倍」の考え方で、割合につながるものである。「a を 1 とみたとき b にあたる大きさ、これを a × b とする」という割合の考えに基づくものである。しかし、これは整数にしか通用しないので、小数倍、分数倍に意味を拡張していくことになる。3 年生までに、二つの数量間の関係を乗法の式で表せることを学ぶ。

4 年生で、「基準量を 1 とみたとき、比較量が〇にあたる」という見方を学ぶ。そして、「基準量の何倍」という見方を用いて、ある 2 つの数量の関係と、別の 2 つの数量の関係を調べ、基準量が違うときには、基準量を 1 とみて、倍を使って比べられることを学ぶ。これは、1 あたりについての比の値を考えることである。

5 年生では、「単位量あたりの大きさ」の単元で、2 つの異種の関係には、比例関係があることを学び「割合」の単元では、2 つの数量の関係を基に比較する際、倍（割合）で比べる場合があることやその表し方を学ぶ。しかし、後述するように、倍の考え方で割合を考えればよく、「1 とみる」を導入する必要は無い。

(4) 割合

割合は、これまで扱ってきた数の「絶対的見方」に対して、数の「相対的見方」となる。割合として扱う内容は「倍」、「比」、「比例」である。「倍」は、基準量を 1 とみたとき、比較する量がいくつに当たるかというものである。「比」は、どちらか一方を基準として表す方法である。教科用図書では、割合の意味を「割合＝比べられる量÷もとにする量」としている。また、割合の表現方法として、百分率と歩合を扱う。「倍」であったり「比」であったり「比例」であったりするが、「1 あたり量」を基準としている。それぞれが異なる内容に見えるため、理解しづらい。しかし、これらも全て倍の考え方で考えれば良い。

(5) 量×量

遠山は、量×量について以下のように述べている。「量×量の立場では、はじめから累加を強調しない。「タコが５匹います。足は全部で何本ですか。」という問題を、８＋８＋８＋８＋８＝８×５＝４０と考えず、タコ１匹あたり足が８本である。このとき５匹分を求めるのがかけ算で、８（１匹あたりの足数）×５（タコの数）＝４０（足の数）と考えさせるのである。(このようにすれば、８×１＝８も８×０＝０もそれぞれタコ１匹分、タコ０匹分の足の数という具体的なイメージを持ち得るから、容易になる。）量×量の場合だと分数、小数への発展が自然である。・・・(中略）×２の２，×３の３はそれぞれ２ｍ、３ｍの２，３であり、累加ではない。つまり、(１あたりいくつ）×（いくつ分)、から発展して、・・(中略)・・連続量×連続量にまで持っていくのである。こうしておけば、「１ｍについて３０円のゴムひも２と１／２ｍではいくらか、２／３ｍではいくらか」という場合でも、容易になる。」(p87,88,1962)

速さ×時間＝距離は、異なる量のかけ算をしたら、さらに異なる量になるという不思議な計算であるが、量×量ができるように見せているだけである。実際は、速さ（本来は速

度）は、m ／秒（秒に m が対応する比例関係）であり、これに時間 n 秒（秒の n 倍）をかけることになるので、量×量のかけ算とはならない。

時間と距離の比例関係（時間の n 倍に距離の n 倍が対応する）から考えると、n 秒に対応する距離は、m メートルの n 倍。m メートルは、メートルの m 倍。よって、m メートルの n 倍は、メートルの m 倍の n 倍。従って、メートルの（m ＋ n）倍となる。

(6) わり算（division）の意味

量をもとにした考え方には、外延量と内包量があり、わり算は内包量に結びついている。b ÷ a をかけ算で考えると、〇× a ＝ b の〇を求める計算になる。例えば、12 個÷ 4 皿＝〇で、これをかけ算の式に直すと〇× 4 ＝ 12 となる。このかけ算の式に対応するわり算は、等分徐である。包含徐の場合は、4 ×〇＝ 12 である。従って、内包量を求める計算がわり算という定義にすると、〇× a ＝ b の〇に当たる数を求める計算になるので、わり算は等分徐でなければならないことになる。

前述したように、かけ算の 2 × 3 ＝ 6 は、1 の 2 倍× 3 ＝ 6 であり、（a × m）× n ＝ a ×（m × n）で表せる。わり算（n ÷ m）は、（m とかけて n になる数）を意味するが、（m とかけて n になる数）には、m×〇＝ n と〇× m ＝ n の 2 通りがある。算数科では、前者を「包含除（quotition）」、後者を「等分除（partition）」という。しかし、わり算はかけ算の逆の計算でしかないので、m も〇も量の比でしかない。

(7) 分数（fraction）

学習指導要領では、分数は有理数を表現する数表記の一つであるとし、その意味は、「分数の表す数の求め方に着目したものとして、以下の 2 つがある。

・分割分数（操作分数）: 何等分かしたもののいくつ分の大きさを表す。

・商分数 : 整数の除法の結果（商）を表す。

また、分数の表す対象の種類に着目したものとして、以下の 2 つがある。

・量分数 : 量を表す分数。

・割合分数 : 割合を表す分数」　（学習指導要領解説　算数編）

ただし、商分数が整数の除法の結果としている点については、小林は以下のような異論を示している。「整数の範囲での除法は、「商と余り」を求める計算にほかなりません。2 ÷ 3 ＝ 2 ／ 3 と表すのは整数の除法ではないのです。（中略）・・11 ÷ 3 は商が 3 で余りが 2 であり、22 ÷ 6 は商が 3 で余りが 4 となります。余りが異なるので、異なった割り算です。しかし、分数で表すと、11 ／ 3 ＝ 22 ／ 6 が成り立っています。（中略）・・・割り算と分数が関係があるのは、連続量を何等分するという場合です。整数だけに対応する分離量の割り算ではないのです」（p67,2021）

児童が分数に先ず戸惑うのは、これまでの数の見方と異なり、分母と分子の二つの意味の異なる数を同時にみなければならないからである。そのため、学び初めの時期には、分数の和の計算では、分子だけでなく、分母も足してしまう間違いがよく見られる。学びを進める中で分数に慣れてきても、分数÷分数になると、ほとんどの児童が意味を理解できずに、わる数をひっくり返してかけ算にするという計算のアルゴリズムだけを覚えて理解したことになってしまう。分数で割る計算の意味を「量の抽象」の考え方で指導するには、面積図を示し、1 あたり量の考え方で指導するので非常に理解しにくい。

これに対し、「量の比」の考え方では、まず割り算はかけ算の逆の計算であるという押

さえをする。割り算の「a ÷ b」は「b とかけて a になる数」を意味し、「b とかけて a となる数」には、b ×○＝ a と○× b ＝ a の 2 通りがある。例えば、3 ／ 5 ÷ 2 ／ 3 は、2 ／ 3 とかけて 3 ／ 5 になる数なので、2 ／ 3 ×○＝ 3 ／ 5 と○× 2 ／ 3 ＝ 3 ／ 5 の 2 通りがある。後者であれば、○＝ 3 ／ 5 × 3 ／ 2 となる。この式の 2 ／ 3 も○も量の比である。

(8) 1 と見る（単位量あたりの大きさ）

「割合」(ratio)の問題では、割合を量にしなければならないので、「1 と見る」を導入する。量 a を 1 に抽象するとき、量 b はどんな数に抽象されるのか。という形をつくる。これは、単に、量 b は a の何倍。とすれば良いのであり、「1 と見る」を持ち出す必要は無い。

「「1 と見る」は数学的には、数の系を（N,＋,×）を素材として、((N, ＋）,×,（N,＋,×))をつくる。これは量の構造を持つものになり、すなわち量となる。(N,＋）の要素が、「量としての数」となり、(N, ＋,×）の要素が「量としての数」の倍作用素、すなわち「量の比」となる。さらに、Qの要素 g に対して定まる対応 f が((Q, ＋）,× ,（N,＋,×))と((N,＋）,×（N,＋,×))の間の同型対応となり f ： g × n → n。　この「同型 f 」が「1 と見る」であり、実際、g を 1 とみているわけである」（宮下、2009, p 50）なお、ここで用いた「× 」は倍作用の記号。

内包量は 1 あたり量である。「異種の 2 つの量の割合」と捉えられており、それぞれ単一の量とは認められていない。その中で速さだけが取り上げられており、速さは、単位時間あたりに進む「道のり」として表すこととしている。これは、「単位量あたりの量」（「単位あたりの量」ではない）であり、変化する 2 つの量の比を示している。一方の基本単位を 1 として、そのときの他の量の変化を表すものである。

元々速さは、方向性のないものであり、速度となって初めて方向性を持つ。1 あたり量をスムーズに導入するため、かけ算の「1 つ分」（1 皿あたり）を「倍」、そして「1 あたり量」へと変えていく。

(9) 文字(characters)

文字の意味は、大きく以下の 3 つとなる。

1，すでに分かっている数量、円周率 π や自然対数の底 e などを文字で表す方法

2，未知数、分からない数をＸやＹの文字で表す方法

3，不定定数、Ｙ＝ａｘ＋ｂの a、b などを表す方法

2，のＸやＹはさらに、未知数と変数として表される。

文字は具体的なものを複雑にしているのではなく、本来複雑な関係を明らかに、分かりやすくするものである。また、これまで具体的な数字を用いて考えてきたが、あることが成り立つかどうか考える際、全ての数字を当てはめて考えることは困難である。そこで全ての数字の代表として、文字を導入することで、いちいち具体的な数字を当てはめなくとも示すことができるようになる。

さらに、文字で置き換えることによって一般化され、関係がわかりやすくなる。しかし、児童は今まで具体的な数(量)しか扱ってこなかったことから、急に抽象的な文字や関係を扱うことで難しく感じたり、関係が読み取れなくなってしまうことが生じる。

「数は量の抽象」の考え方の課題として、具体的な場合をみてきた。特に「1 とみる」の考え方を導入することで、割合に対応しようとしている。しかしそれは量の比較であり、

結果として割合（倍）に無理に結びつけていることになってしまった。この点に対応するためには、量の比の考え方を部分的にも取り入れることである。

8「数は量の比」の考え方は算数科の題材をどう扱うか

同じ題材を「数は量の抽象」と「数は量の比」それぞれで扱った場合の考え方を比較する。

（1）たし算（addition）

現行の教科用図書1年生の「たし算」の指導は、具体物（果物や子ども）から、半具体物（ブロックや丸印）、立式の順である。量の考え方を具体的に示すと、例えば、4 ＋ 3は、3から4の方へ1個ずつ移動させ、7とする。宮下はこれについて以下のように述べている。「この手順は、ペアノの公理の中にある求和アルゴリズムに他なりません。」（2008、Ｐ 32）

一方「数は量の比」の考え方は、基になる長さをＸとおく。Ｘの4倍の長さをＹ，Ｘの3倍の長さをＺとし、この和をＹ＋Ｚで表す。この時の＋は量の＋。ここで、Ｘに対するＹ＋Ｚの比は、4と3で決まるので、4＋3と書く。

3／7＋2／7の比の形になっている分数で考えると、基の数Ｘの7倍に対する3倍（3／7は3：7）のＶと、7倍に対する2倍（2／7は2：7）のＷがとれる。基の数Ｘに対する7倍はどちらも同じなので、ＶとＷは同じ。求めるＹはＸの（3 ＋ 2）倍。ＸとＹはＶによって、7：（3＋2）の比になる。よって、Ｘに対するＹの比は、（3＋2）／7となる。どちらも基になる数Ｘに対する比という考え方になる。

（2）長方形（rectangle）の面積の求積

現行では、例えば、縦5㎝、横7㎝の長方形の求積の場合は、一辺が1㎝の正方形（1㎠）がいくつ入るかで計算する。縦5個の列が7列あると考え、5×7＝35個、1個は1㎠なので、35㎠となる。しかし、この考え方では、縦3 ／ 8㎝、横4 ／ 7㎝の長方形の面積（本来分数×分数の求積自体が適切ではない。）となると、これまでの考え方では対応が難しくなる。

「数は量の比」の考え方ではまず、「複比例」の考え方をする。横の長さを固定したとき、縦の長さと面積は比例する。縦の長さを固定したとき、横の長さと面積は比例する。というものである。基の大きさをＸとしたとき、その3／8倍の大きさＹを考える。そのＹの4／7倍（倍は比です）が求める面積となる。したがって、3／8×4／7＝12／56＝3／14となる。

（3）速さ（speed）

現行では、「速さ」は、異種の2つの数量の割合として捉える。速さの表し方として、2つの方法を示している。

一つ目は、速さを単位時間あたりに移動する距離として捉える。具体的には、1秒あたりに走った平均の距離となる。

二つ目は、速さを一定の長さを移動するのにかかる時間として捉える。具体的には、1ｍあたりにかかった平均の時間となる。どちらも瞬間を測ることはできないため、平均を取ることになる。いずれの表し方も単位量あたりの大きさの考え方である。

「数は量の比」の考え方では、全て 2 量間の比であり、「速さ」という量を「時間」と

「距離」という 2 量の比で考える。一定の速さは、「時間」と「距離」の間の比例関係と考える。経過時間が 2 倍、3 倍・・・となれば、移動距離も 2 倍、3 倍・・・というものである。

現行では速さの和を求めることはできないが、「数は量の比」の考え方では、時速 2 ㎞と時速 3 ㎞の和は、1 時間に 2 ㎞が対応する比例関係（距離）と 1 時間に 3 ㎞に対応する比例関係（距離）の和であり、1 時間に（2 ㎞と 3 ㎞の和）が対応する比例関係（距離）となる。従って、時速 5 ㎞となる。

実際の場面としては、時速2㎞で動く歩道の上を時速3㎞で歩いた場合となる。ただし、この場面は、一つの系の中で起きている事象を系の外から見た場合である。

これを数学的に示すと、「「2量関係である比例関係がそれ自体量ととらえられる」ということは、「線形代数」では、以下のように示す。体K上の二つの線形空間V, V'に対し、VからV'への線形写像全体の集合Hom（V, V'）は、f,g∈Hom（V, V'）,k∈kに対し、f＋gおよびfxkを次のように定義することにより、体k上の線形空間になる:　(f＋g)(x)＝f(g)＋g(x)　(x∈v)　(fxk)(x)＝f(x)xk　(x∈v)　」(宮下、p132, 2008)

量の抽象の考え方では、たし算は未だに「かぞえ主義」が垣間見える。また、量のたし算であることが明白である。長方形の求積でも 1 ㎠の正方形を数える考え方であり、量の計算である。速さについては、1 あたり量の考え方である。

ただし、学習指導要領解説に、2 量の比の考え方として示されている例もある。第 6 学年における「算数の学習場面から算数の問題を見いだして解決し、解決過程を振り返り、統合的・発展的に考察する活動」の例として、「ぼくは、5 年生の時に学習した速さに関する式で、（長さ）＝（速さ）×（時間）が比例するかどうかを調べました。これは、ｙ＝ 0．8 ×ｘと比べると、（長さ）と（速さ）が比例しているとも、（長さ）と（時間）が比例しているとも考えられます。第 6 学年で比例を学習することは、（中略）・・・これまで学習してきたかけ算に関する学習内容が全て比例の関係を表している・・・（後略）」（学習指導要領解説算数編、2019）でわずかに触れている。

9　算数科ならではの指導法

算数は、6 歳の 1 年生から 12 歳の 6 年生まで、発達段階が大きく異なる児童を対象としている。その内容は、日常生活に不可欠な計算方法や、社会生活を送る上で必要不可欠な論理的思考力の基礎を学ぶものである。特に指導法は、中学校以上の生徒のように、学習の仕方や考え方の基礎が身についているわけではなく、一から指導しなくてはならない。

指導に当たっては、具体物や半具体物を使用し、物を動かしたり図を書いたりして、考えのきっかけとすることや確認をするための操作活動は不可欠である。例えば図形などでは、証明という解決手段を持たないために、図形を重ねることで同じ物（合同）と理解する。

自分の考えを持てなかったり、発表が苦手だったりする児童に対して、操作活動で確認することで自信を持たせたり、ペア学習やグループ学習などの指導形態の工夫で対応することも必要である。

このように、児童の発達段階や個性、特性などに応じた細やかな配慮をした指導が必要となる。学習内容に量の比の考え方を取り入れる際は、数学科とは異なる算数科の指導法

の特性を踏まえることでさらに指導の効果が上がるものと期待できる。
また近年、発達障害など様々な課題のある児童が増えてきている。この児童たちにとっても日常生活に結びつきやすく、筋道立てた考え方の基礎など、今後の社会生活を送る上で不可欠な学びである算数科の学習内容は、可能な限り獲得させなくてはならない。この点でも算数科の指導法のさらなる工夫が求められている。
数学科と違う特性を持つ算数科の指導法があることを理解し、内容と同時にこの異なる指導法を踏まえ、算数科の内容を見直していくことが大切である。

10　考察

これまで、算数の授業に取り組んできた中で、多くの児童が苦手意識を持ったり、意味が理解できないまま形式だけ覚えて済ました題材がいくつかある。
一つ目は、わり算である。わり算はそれまで学んできた「たし算」、「ひき算」、「かけ算」を全て使わなければ解決できない。しかし、これは計算のアルゴリズムに習熟すれば意味が理解できなくともできてしまう。
二つ目は、「分数」や「単位量あたりの大きさ」である。その中でも特に、「分数÷分数」は、意味を考えずに、わる数をひっくり返してかけ算にすること。「速さ」は、「み（道のり）は（速さ）じ（時間）」の三者の図を書いて式にすることで、意味は分からないが計算はできることで済ましてきた。
これらの課題をこれまでの「量の抽象」ではなく、「量の比」の考え方で解決できないかを検討してきた。(8) で示したように、「分数÷分数」では、わり算はかけ算の逆という考え方を取り入れたり、「割合」に関する題材や「平面図形の求積」では、「量の抽象」と「量の比」の両者を組み合わせるなど、両者の良さを取り入れた指導をすることも効果的である。

まとめと今後の課題

算数科の教科用図書、そしてその基となる学習指導要領の考え方の根底は「数は量の抽象」である。それは、教科用図書 1 年生の数の導入過程からも読み取れる。「数」の導入は、「具体物の集合」から「多さ（離散量）という量」の段階を経て、それらの抽象としての「数（自然数）」となっていく。このことは、「数」と「量」は概念的には区別するものであるにもかかわらず、量の抽象としての「数」としていることになる。
前述したように、「量」は本来「数」と結びついていない。「単位」という考え方を導入したことで「数」と結びついたのである。「数」自体には本来大きさはない。
中学校 1 学年の題材である「正負の数」(directed　number) で、－ 1 と－ 100 のどちらが大きいか（この問自体に問題はある）と生徒に問うと、－ 100 と答える生徒が少なからずいる。この理由は、数自体に大きさがある、すなわち「数は量の抽象」の考え方で学んできたからである。
本来、数自体には大きさはない。1 の次が 2，1 の次の次が 3・・・となっていくものである。これに対して、1 より 2 が大きいと考えるのは、数を量として認識したり、数を物の個数、すなわち集合数として認識したりしてきたからである。
また、算数の学習において、なぜ 2 × 3 という式を 3 × 2 と書いてはいけないのかとい

う論争が時に起こってくるのは、算数ではかけ算の式に意味を持たせていることが、広く周知されていないからであり、その根本には、「数は量の抽象」があるからと言える。

これらの課題を軽減するためには、「数は量の抽象」にどっぷりつかってしまうのではなく、算数の題材に応じて「数は量の比」の考え方を取り入れていくことである。これにより、中学校数学へスムーズに移行できるであろう。

小学校低学年から中学年にかけては、数と量を結びつけた考え方によって指導することで理解しやすいことも確かである。しかし、小学校の教員は「数は量の抽象」と「数は量の比」の考え方それぞれの良さを理解し、例えば、加法・減法の指導では数と量を結びつけた考え方で指導し、乗法・減法や「割合」の指導では、量の比の考え方を踏まえて指導するなど、題材に応じて柔軟な指導を工夫していくことが肝要である。両者の良さを活かした指導こそが算数科の指導に必要であり、児童・生徒にとっても理解しやすくなる。

「数は量の抽象」の考え方を「数は量の比」の考え方で補完していくことによって、児童にとってより理解が容易になっていくであろうことはみえてきた。両者の良さを活かして指導できる題材を洗い出し、具体的な指導内容を明確にしていくことが今後の課題となる。

小学校教員を目指す者は、算数科の概論や指導法・教材研究などを学ぶ中で、「数は量の抽象」と「数は量の比」それぞれの考え方の良さや課題を理解し、それに基づいて、教材の内容や特性を学び理解する。さらにその上で十分分析し、それぞれの良さや課題を理解することが肝要である。

また、それらを踏まえ、小学校算数科ならではの指導法の特性を学び、身につけることで児童の実態に応じた、より深い学びを展開することができるであろう。

【引用、参考文献】

［1］足立恒雄、『フェルマーの大定理－整数論の源流』、日本評論社、1984

［2］足立恒雄、『√ 2 の不思議』、光文社、1994

［3］足立恒雄、『数－体系と歴史』、朝倉書店、2002

［4］足立恒雄、『数とは何か』、共立出版、2011

［5］足立恒雄、『数の発明』、岩波書店、2013

［6］志賀浩二、『数と量の出会い』、紀伊國屋書店、2007

［7］小林道正、『学びなおす算数』、筑摩書房、2021

［8］黒木哲徳、『入門　算数学』、日本評論社、2004

［9］樋口禎一　他、『現代数学の基礎』、牧野書店、2002

［10］銀林浩　編、『どうしたら数学ができるようになるか』、日本評論社、2001

［11］銀林浩、岩村茂雄　編　『いろいろな量』、日本標準社、2008

［12］銀林浩、岩村茂雄　編　『割合と比例』、日本標準社、2008

［13］遠山啓、長妻克亘、『量の理論』、明治図書、1962

［14］遠山啓、『数の生い立ち、数の歴史』、日本図書センター、2013

［15］遠山啓、『代数学入門』、筑摩書房、2016

［16］高木貞治、『数の概念』、講談社、1949
［17］リヒャルト・デデキント、河野伊三郎　訳、『数について』岩波書店、1961
［18］リヒャルト・デデキント、淵野昌　訳、『数とは何か　そして何であるべきか』、筑摩書房、2013
［19］石原直、『分数の除法の意味理解を深めるための包含所の扱い』、教授学習心理学会第 5 回年会、2009
［20］石原直、『算数科の授業改善のための定義・定理の役割』、教授学習心理学会第 7 回年会、2011
［21］杉山吉茂、『初等科数学科教育学序説』、東洋館出版社、2008
［22］鵜沼仁、『数・式・記号の英語』、丸善株式会社、2007
［23］宮下英明、http://m.jwa.hokkyodai.ac.jp/me/instraction/subjects/number/qna/（2008）『数は量の比－「数は量の抽象」ではない』
［24］宮下英明、http://m.jwa.hokkyodai.ac.jp/me/instraction/subjects/number/qna/（2004）『いろいろな数がつくられるしくみ』
［25］宮下英明、http://m.jwa.hokkyodai.ac.jp/me/instraction/subjects/number/qna/（2007）『「数とは何か？」への答え』
［26］藤井斉亮　他、『新しい算数 1 年～ 6 年』、東京書籍、2020
［27］『小学校学習指導要領解説　算数編』、文部科学省、2019
［28］『中学校学習指導要領解説　数学編』、文部科学省、2019
［29］『高等学校学習指導要領解説　数学編』、文部科学省、2019